§5.2 解析函数在孤立奇点的性质

一. 孤立奇点的分类

1. 定义

Def. 若 $f(z)$ 在 $z=a$ 的某去心邻域内解析，在 $z=a$ 为奇点，则称 $z=a$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点

例如，$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$，$f(z)=\frac{\sin z}{z}$，$f(z)=\sin\frac{1}{z}$ 均以 $z=0$ 为孤立奇点.

2. 孤立奇点的分类

设 $f(z)$ 以 $z=a$ 为孤立奇点，$f(z)$ 在 $z=a$ 的 Laurent 展式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-a)^n \xlongequal{\text{记作}} \Sigma_1+\Sigma_2$$

称 Σ_1 为 Laurent 级数的主要部分，Σ_2 为 Laurent 级数的正则部分

(1) 可去奇点：主要部分为 0

(2) m 阶极点：主要部分有有限项：$\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{(z-a)^1}$

(3) 本性奇点：主要部分有无限项

二、孤立奇点的性质

Thm 1. 设 $f(z)$ 以 $z=a$ 为孤立奇点，则下列命题等价：

(1) $f(z)$ 在 $z=a$ 的 Laurent 展式主要部分为 0

(2) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在但非无穷

(3) $f(z)$ 在 $z=a$ 的某去心邻域内有界

Pf. (1)⇒(2)：$f(z)$ 在 $z=a$ 的 Laurent 展式：$f(z)=C_0+C_1(z-a)+\cdots$

$$\lim_{z\to a} f(z)=C_0$$

(2)⇒(3)：由极限的局部有界性可得.

(3)⇒(1)：设 $f(z)$ 在 $z=a$ 的某去心邻域内有界，设 $|f(z)|\le M$.

$f(z)$ 在 $z=a$ 的 Laurent 展式：(取 $\Gamma_\rho: |z-a|=\rho$ 含在邻域内)

当 $n=-1,-2,\cdots$ 时，$|C_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\rho^{n+1}}\cdot 2\pi\rho = M\rho^{-n}\to 0.$$

表明 Laurent 展式中主要部分系数全为 0.

Rem. 可~~取~~去奇点可以通过补充 $f(a)=\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 使 $f(z)$ 在 $z=a$ 也解析，故经常将可去奇点看成解析点。

例如 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$，$F(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z}, & z\neq 0\\ 1, & z=0\end{cases}$

Thm 2. 设 $f(z)$ 以 $z=a$ 为孤立奇点，则下列命题等价：

(1) $f(z)$ 在 $z=a$ 的 Laurent 展式主要部分为有限项：

$$\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{(z-a)^1}\ (C_{-m}\neq 0).$$

(2) $f(z)$ 在 $z=a$ 的某去心邻域内可表示为：$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-a)^m}$

这里 $\lambda(z)$ 在 $z=a$ 的邻域内解析 $(\lambda(a)=C_{-m}\neq 0)$.

(3) $\frac{1}{f(z)}$ 以 $z=a$ 为 m 级零点

(4) $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

Pf. (1)$\Rightarrow$(2)：$f(z)$ 在 $z=a$ 的 Laurent 展式：$f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{(z-a)^1}+\Sigma_2$

于是 $f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\left[C_{-m}+C_{-m+1}(z-a)+\cdots+C_{-1}(z-a)^{m-1}+\cdots\right]$

$$=\frac{1}{(z-a)^m}\lambda(z)$$

这里 $\lambda(z)$ 在 $z=a$ 解析，且 $\lambda(a)=C_{-m}\neq 0$.

(2)$\Rightarrow$(3)：$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-a)^m}\Rightarrow\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\cdot\frac{1}{\lambda(z)}=(z-a)^m\cdot\varphi(z).$

这里 $\varphi(z)=\frac{1}{\lambda(z)}$ 在 $z=a$ 显然解析，且 $\varphi(a)=\frac{1}{C_{-m}}\neq 0.$

表明 $\frac{1}{f(z)}$ 以 $z=a$ 为 m 级零点.

(3)⇒(4): $\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\varphi(z)\Rightarrow\lim\limits_{z\to a}\frac{1}{f(z)}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

(4)⇒(1): $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty\Rightarrow\lim\limits_{z\to a}\frac{1}{f(z)}=0$，$\frac{1}{f(z)}$ 以 $z=a$ 为零点且非常数，存在正整数 m s.t. $\frac{1}{f(z)}$ 以 $z=a$ 为 m 级零点，

记 $\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 $z=a$ 解析，于是：

$\frac{1}{\varphi(z)}=C_0+C_1(z-a)+\cdots$，$C_0\neq 0$

于是 $f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{C_0}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{C_{m-1}}{(z-a)^1}+C_m+\cdots$

表明 $f(z)$ 在 $z=a$ 的 Laurent 展式主要部分为有限项.

Thm 3. $f(z)$ 以 $z=a$ 为本性奇点 $\Leftrightarrow\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 不存在且非 ∞.

Pf. 由 Thm 1., Thm 2. 和孤立奇点的分类显然.

例如，$f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 以 $z=0$ 为可去奇点，

$f(z)=\frac{1}{z^3}$ 以 $z=0$ 为 3 阶极点，$\left(f(z)=\frac{1}{z^3}+e^z\right)$

$f(z)=\sin\frac{1}{z}$，$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 以 $z=0$ 为本性奇点，

三、本性奇点的进一步讨论

Cor. (1) 若 $f(z)$ 以 $z=a$ 为本性奇点，且 $f(z)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(z)}$ 以 $z=a$ 为本性奇点.

Pf. $\lim\limits_{z\to a}\frac{1}{f(z)}=A$，当 $A=0$ 时 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$，$f(z)$ 以 $z=a$ 为 m 级极点；当 $A\neq 0$ 时 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\frac{1}{A}$，$f(z)$ 以 $z=a$ 为可去奇点，矛盾.

$\lim\limits_{z\to a}\frac{1}{f(z)}=\infty$，则 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=0$，$f(z)$ 以 $z=a$ 为可去奇点，矛盾.

于是 $\frac{1}{f(z)}$ 以 $z=a$ 为本性奇点.

Cor. (2) 若 $f(z)$ 在孤立奇点 $z=a$ 的任意邻域内无界，则 $f(z)$ 以 $z=a$ 为 m 级极点或本性奇点.

Thm. 设 $f(z)$ 以 $z=a$ 为本性奇点，若对任意复数 A（含 ∞），都存在 $z_n \to a\ (z_n \neq a)$ s.t. $f(z_n) \to A$.

Pf. (1) 若 $A=\infty$，由 Cor (2)，$f(z)$ 在本性奇点的任意邻域内无界.

$\exists\, z_n \to a\ (z_n \neq a)$ s.t. $f(z_n) \to \infty$.

(2) 若 A 是一复数，若~~在 $z=a$ 的~~存在 $z_n \to a\ (z_n \neq a)$，$f(z_n)=A$，则成立. 否则存在 $z=a$ 的去心邻域 s.t. $f(z_n) \neq A$.

由 Cor (1)，有 $\dfrac{1}{f(z)-A}$ 以 $z=a$ 为本性奇点，

再由 (1)，$\exists\, z_n \to a\ (z_n \neq a)$ s.t. $\dfrac{1}{f(z_n)-A} \to \infty \Rightarrow f(z_n) \to A$.

Thm. 若 $f(z)$ 以 $z=a$ 为本性奇点，则对任意复数 A（最多一个除外）都存在 $z_n \to a\ (z_n \neq a)$ s.t. $f(z_n)=A$.

例如，$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 以 $z=0$ 为本性奇点，$\forall A \in \mathbb{C}\ (A \neq 0)$，$\exists\, z_n \to 0$ 使 $f(z_n)=e^{\frac{1}{z_n}}=A$.